Prof. Dr. Z. Kabluchko
Hauke Seidel

Wintersemester 2017/18
30. Oktober 2017

Wahrscheinlichkeitstheorie 2

Übungsblatt 4

Abgabe: 6. November 2017 bis 14:15 Uhr

Aufgabe 1 (3 Punkte)
$Y_1, Y_2, \ldots$ sei eine Folge nichtnegativer i.i.d. Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}Y_1 = 1$, die nicht fast sicher 1 sind. In Aufgabe 1a auf Blatt 2 haben Sie gezeigt, dass $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ bezüglich der von den Y_n erzeugten Filtration ein Martingal ist, wenn $X_n := \prod_{i=1}^n Y_i$ für $n \geq 1$, $X_0 := 1$. Zeigen Sie, dass $X_n \to 0$ fast sicher.

Hinweis: Zeigen Sie, dass fast sicher $\frac{1}{n}\log X_n \to c$ für ein $c \in (-\infty, 0)$.

Aufgabe 2 (2+2+1 Punkte + 3 Bonuspunkte)
Die asymmetrische Irrfahrt $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist definiert durch $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$, $S_0 = 0$, wobei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge unabhängiger identisch verteilter Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}(X_1 = 1) = p$, $\mathbb{P}(X_1 = -1) = q$, $p + q = 1$ für $p, q \in (0,1)$ ist. Für $x \in \mathbb{Z}$ ist die Stoppzeit $T_x := \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : S_n = x\}$ die Ersteintrittszeit in $\{x\}$.

(a) Zeigen Sie, dass mit $\varphi(z) := \left(\frac{q}{p}\right)^z$ die Folge $(\varphi(S_n))_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Martingal bezüglich der von $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ erzeugten natürlichen Filtration ist.

(b) Zeigen Sie: Für $a < 0 < b$ gilt $\mathbb{P}(T_a < T_b) = \frac{\varphi(b)-\varphi(0)}{\varphi(b)-\varphi(a)}$.
Hinweis: Definieren Sie die Stoppzeit $T := T_a \wedge T_b$ und betrachten Sie $\mathbb{E}\varphi(S_T)$.

(c) Zeigen Sie, dass wenn $p > \frac{1}{2}$ ist, für alle $a < 0$ folgendes gilt:

$$\mathbb{P}(\min_{n\in\mathbb{N}} S_n \leq a) = \mathbb{P}(T_a < \infty) = \left(\frac{q}{p}\right)^{-a}.$$

(d) *Bonus:* Für $p > \frac{1}{2}$ und jedes $b > 0$ ist bekannt, dass fast sicher $T_b < \infty$ ist. Zeigen Sie:

$$\mathbb{E}T_b = \frac{b}{2p-1}.$$

Hinweis: Betrachten Sie das Martingal $(S_n - (p-q)n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.